جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم

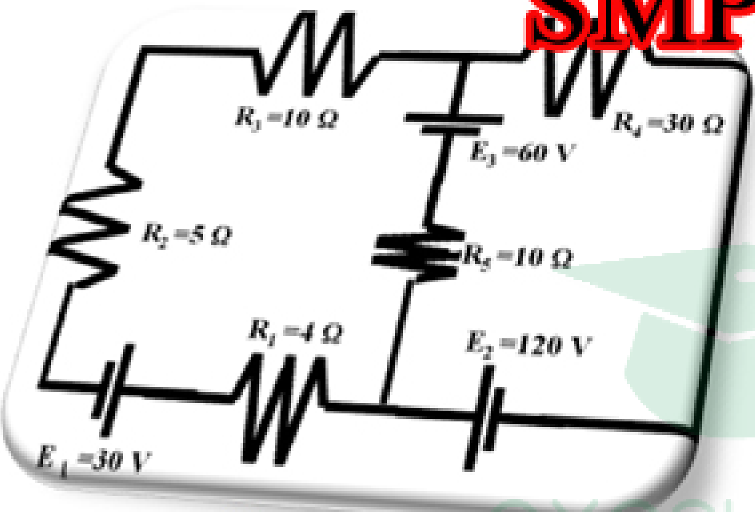
نادي النجاح
Success Club

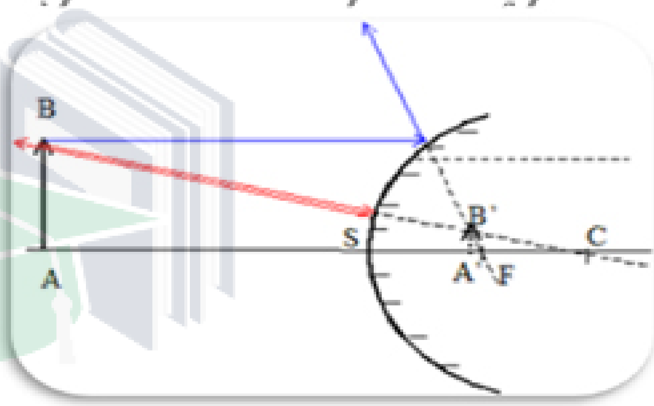
CORRECTION DES EXAMENS

éléctricité,optique,laiasson chimiques

SMPC2

...que ,analyse,algebre





éléctricité,optique,laiasson chimiques

chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre

éléctricité,optique,laiasson chimiques

من إنجاز نادي النجاح

chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre
éléctricité,optique,laiasson chimiques
chimie des solutions ,langue ,analyse,algebre

نادي النجاح
كلية العلوم
success club

2ème EDITION

2014/2015

تم بفضل الله الإنتهاء من إعداد هذا المطبوع الذي شارك في إعداده كل من الطلبة :

عبد الهادي حملي ،عبد العزيز مقطفي ، إيمان أسس ،زكرياء المعيدن، هشام حباش، محمد المالكي .

وتشكراتنا لكل من ساهم من قريب أو بعيد في إنجاز هذا التصحيح، الذي نتمنى أن يكون وسيلة إيجابية وفعالة في الرفع من مستوى التحصيل العلمي بالجامعة ، وان يجعل منه الطالب مرجع للتأكد من الطريقة المتبعة في الإجابة عن الأسئلة أثناء الامتحان .

ونتوجه بشكر خاص لكل من الأساتذة :

نورالدين الحوسيف ،محي الدين اباني ،إنعام العلوي العبدلاوي ،حميد نبدي، خالد الصريدي ،محمد لغدير.

لأي إستفسار المرجو مراسلتنا عبر:

Facebook : www.facebook.com/succes.club

نادي النجاح كلية العلوم الجديدة

e-mail : clubnajah2013@gmail.com

أو ولوج الموقع الإلكتروني للنادي

Site web : www.clubnajah.blogspot.com

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences d'El Jadida
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2011/2012
Semestre 2 : SMPC

Session rattrapage de l'élément du module Analyse2

durée : 1h 30mn

Documents Interdits. Utilisation de calculatrice personnelle.

Exercice 1 : *Soit l'intégrale définie* $I = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt$.

1. *Montrer que* $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

   (Indication : utiliser le changement de variable $t = \pi - x$ *)*

2. *En déduire que :* $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

3. *Calculer la valeur de* I.

Exercice 2 :

1. *Donner sans démonstration la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. a) *En déduire la nature de* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

   b) *Calculer* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

3. *Pour* $X > 1$, *On pose* $F(X) = \int_1^{X} \frac{ln(t)}{t^2} dt$. *En faisant une intégration par partie, calculer* $\lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X)$.

4. a) *Montrer que* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{ln(x+1)}{lnx} = 1$.

   b) *Donner la nature de* $\int_1^{+\infty} \frac{ln(1+x)}{x^2} dx$

Exercice 3 : *Soit l'équation différentielle* $y" + 6y' + 9y = \cos x + e^{-3x}$ (E).

1. *Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à l'équation* (E).
2. *Résoudre l'équation différentielle* $y" + 6y' + 9y = \cos x$ (E_1).
3. *Résoudre l'équation différentielle* $y" + 6y' + 9y = e^{-3x}$ (E_2).
4. *En déduire la solution générale de l'équation* (E).

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences d'El Jadida
Département de Mathématiques

Année universitaire 2012/2013
Semestre 2 : SMPC
Session normale

EXAMEN de l'élément du module Analyse 2

Durée : 1h30mn

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$K_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

1. *Calculer K_1.*
2. *Montrer, en effectuant une intégration par partie, que*
$$K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2).$$
3. *En déduire la valeur de K_2.*
4. *Calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.*
5. *En déduire la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$.*

Exercice 2

Résoudre, dans leurs domaines de définitions, les équations différentielles suivantes :

1. $y' \cos x + y \sin x = 1.$
2. $y'' + y' - 6y = (-8x^2 - 1)e^x.$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$ définie sur $]1, +\infty[$.

1. *Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$. En déduire la nature de $\int_1^2 f(x)\,dx$.*
2. *On pose $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ définie sur $[2, +\infty[$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.*
En déduire la nature de $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.
3. *Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$?*

Exercice 4

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$; $x \in [0, +\infty[$.

1. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.*
2. *Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f.*

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences d'El Jadida
Département de Mathématiques

Année universitaire 2012/2013
Semestre 2 : SMPC
Session de rattrapage

EXAMEN de l'élément du module Analyse 2
Durée : 1h30mn

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.

Exercice 1

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\, dx$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0 \quad (E)$.

1. *On pose* $z = y^2$. *Montrer que l'équation différentielle obtenue en* z *est* **linéaire du premier ordre** *puis la résoudre.*
2. *Montrer que l'équation* (E) *est du* **premier ordre homogène** *puis la résoudre.*

Exercice 3

On définit sur $]0, +\infty[$ *la fonction* f *par :* $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

1. *Soit* $X \in [1, +\infty[$, *calculer* $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln x}{x^2}\, dx$. *En déduire la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.
2. *Montrer que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *est convergente.*

   On pose $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$

3. *Montrer, en effectuant le changement de variable* $t = \dfrac{1}{x}$, *que* $K = -\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.
4. *En déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *est convergente et égale à* $2K$.
5. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = 0$

Exercice 4

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$; $x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge simplement vers une fonction* f *que l'on déterminera.*
2. *La convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADID.
LE PRÉSIDENT

Corrigé 2011-2012
session rattrapage
d'Analyse 1

EX : 1

1)- On montre que $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}$

On pose $t = \pi - x$ $\Leftrightarrow -x = t - \pi$

$\Leftrightarrow x = t - \pi$

$dx = -dt$

Si $x = 0 \Rightarrow t = \pi$

Si $x = \pi \Rightarrow t = 0$

avec $\sin(\pi - x) = \sin\pi \cos\pi - \cos\pi \sin\pi$

$= + \sin x$

et $\cos^2 t = \cos^2(\pi - x)$

$= (-\cos(x))^2 = \cos(x)^2$

Car

$\cos(\pi - x) = \cos\pi \cos x + \sin\pi \sin x$

finalement on obtient

$$I = \int_{\pi}^{0} - \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

2)- On a $I = \int_0^{\pi} \frac{t \sin(t)}{1+\cos^2 t} dt$

$$= \int_0^{\pi} t\, f(t)\, dt$$

avec $f(t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos^2 t}$

$$\boxed{\int_a^b t\, f(t) = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi + 0}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

3) On fait un changement de variable:

$u = \cos(x)$

donc $du = -\sin x\, dx$

d'où $I = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\text{Arctg}\, u\right]_1^{-1} = \frac{\pi}{2} \times 2$$

$$\boxed{= \pi}$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 1

1)- Sans démonstration la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-\alpha}\, dx$$

$\alpha \neq 1$ $\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^t$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right]_1^t$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{-1}{-\alpha+1} \in \mathbb{R} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & ; \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}}$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Cas où $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} [\ln(x)]_1^t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{si } \alpha > 1 \text{ l'intégrale convergente} \\ \text{si } \alpha \leqslant 1 \text{ l'intégrale devergente} \end{cases}$$

2)

a)- la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

On a $\alpha = 2 > 1$ alors l'intégrale est convergente

b)- calcul $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

$$= \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{dx}{x^2} = \lim_{X \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^X$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} + 1 \right] = 1$$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

3)- pour $x > 1$, $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}$

En faisant une intégration par partie

On pose $U = \ln(t) \longrightarrow U' = \frac{1}{t}$

$V' = \frac{1}{t^2} \longrightarrow V = -\frac{1}{t}$

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^x + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$

$$= 1$$

Car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

4)

a- On montre que , $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1$

On applique la règle de l'hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln(x))'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\boxed{\text{donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1}$$

b)- la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$ au voisinage de $+\infty$

$\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} x$, $\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ est Convergente

alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$ C.V

Corrigé Session rattrapage 2011 - 2012 d'Analyse 2

EX : 3 l'équation différentielle

$$y'' + 6y' + 9y = \cos(x) + e^{-3x}$$

1) $y_0(x) = e^{-3x}(Ax + B)$ C'est la solution generale de (E_1)

Sans seconde nombre

$y'' + 6y' + 9y = 0$ l'equation caractéristique

$r^2 + 6r + 9 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 36 - 4 \times 9$

$= 0$

$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

la solution de l E.c , $\boxed{y = e^{-3x}(A(x) + B)}$

2)- d'aprés Cequi précède on a la solution on homogène

$y_0 = e^{-3x}(A(x) + B)$

On cherche la solution parcticulière

On a

$r = 0 + i$ n'est pas solution de l'équation on

Caractérastique

danc la solution particulière sous forme

$y_p = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$

$$y' = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$$

$$y'' = -\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x)$$

<u>On obtient</u>

$$\Leftrightarrow -\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x) + 6\left(-\lambda_2 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)\right) + 9\left(\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)\right)$$
$$= \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow -\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x) - 6\lambda_1 \sin(x) + 6\lambda_2 \cos(x) + 9\lambda_1 \cos(x)$$
$$+ 9\lambda_2 \sin(x) = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow 8\lambda_1 \cos(x) + 8\lambda_2 \sin(x) - 6\lambda_2 \sin(x) + 6\lambda_2 \cos(x)$$
$$= \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow (8\lambda_1 + 6\lambda_2)\cos(x) + (8\lambda_2 - 6\lambda_1)\sin(x) = \cos(x)$$

$$\begin{cases} 8\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \\ 8\lambda_2 - 6\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \\ 8\lambda_2 = 6\lambda_1 \\ \lambda_2 = \frac{6}{8}\lambda_1 = \frac{3}{4}\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\lambda_1 + \frac{18}{4}\lambda_1 = 1 \\ 8\lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16\lambda_1 + 9\lambda_1}{2} = 1 \\ \frac{25\lambda_1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \lambda_1 = \frac{2}{25} \right.$$

$$y_p = \frac{2}{25}\cos(x)$$

la solution général

$$y_{E_1} = y_0 + y_p = e^{-3x}\left(A(x)+B\right) + \frac{2}{25}\cos(x)$$

3) d'aprés ce qui précède on a la solution homogène de l'équation particulière

$y_0 = e^{-3x}\left(A(x)+B\right)$, on cherche la solution particulière

On a $r=-3$ est une solution de l'équation particulière alors la solution particulière sous la forme

$P(x)e^{-3x}$ et -3 est 1 racine double de l'EC

$$y_2(x) = Q(x)e^{-3x}$$

$Q \in K[X]$ et $d^\circ Q = d^\circ p + 2 = 2$

$$\Rightarrow y_2(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$$

$$y_2(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + b + c\right)e^{-3x} \quad , c \in \mathbb{R}$$

C/C : la solution général de E est $y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \theta x + \delta\right)e^{-3x}$

$$+ \frac{2}{25}\cos x + \frac{3}{50}\sin(x) \,, \quad \theta, \delta \in \mathbb{R}$$

Correction Examen de l'élément du Module Analyse 2
2012 / 2013 (normal).
SMPC2

Exercice I Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$K_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

① Calculer K_1 :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \left[\arctg(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

② Montrer que : $K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2)$

on pose

$$u' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad u = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

on a $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = K_1 - K_2$

Donc $K = \left[\frac{1}{2}\right] + 2(K_1 - K_2)$

③ En déduire K_2

on a $K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2)$

D'où $K_1 = \frac{1}{2} + 2K_1 - 2K_2$

$$2K_2 = \frac{1}{2} + 2K_1 - K_1$$

$$2K_2 = \frac{1}{2} + \cancel{K}_1 \Longrightarrow K_2 = \frac{\frac{1}{2} + K_1}{2}$$

④ Calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= [\operatorname{Arc\,Sin}]_0^1 - \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2} + [\sqrt{1+x}]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$\boxed{5}$ En déduire la limite de la suite $U_n = \sum_{K=1}^{n} \sqrt{\frac{n-K}{n^3+n^2K}}$

on a La Somme de Riemen :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{K=1}^{n} f\left(a+K\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

on a $U_n = \sum_{K=1}^{n} \sqrt{\frac{n-K}{n^3+n^2K}}$

$$= \sum_{K=1}^{n} \sqrt{\frac{n(1-\frac{K}{n})}{n^3(1-\frac{K}{n})}} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} \sqrt{\frac{(1-\frac{K}{n})}{(1+\frac{K}{n})}} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{K}{n}\right)$$

Donc avec $f(x) = \sqrt{\frac{1-X}{1+X}}$

$$\lim_{x\to+\infty} U_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

$\boxed{\text{Exercice III}}$ Résoudre les équations différentielles.

$\boxed{1}$ $y'\cos x + y\sin x = 1$

ou $y' = \frac{dy}{dx}$ on Résoudre équation homogène

$y'\cos x + y\sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cos x = -y\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\operatorname{tg}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \log|y| = \log|\cos t| + c$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln|\cos t|}\cdot K$$

$$\Rightarrow y = K\cdot\cos(x).$$

Suite de Examen normale 2012 / 2013

Exercice II

1) Suite

on a $y = K\cos(x)$

on cherche la solutions particulier

$y = K\cos x$

$y' = K'\cos x - K\sin x$

on remplace dans l'équation.

$y'\cos x + y\sin x = 1$

$K'\cos x - \cancel{K\sin x \cdot \cos x} + \cancel{K\cos x \cdot \sin x} = 1$

$K'\cos^2 x = 1 \Rightarrow K' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad K(x) = tg(x) + c$

Donc la solution de E $y = y_H + y_P =$

$= K(x)\cos x + (tg(x) + c)\cos x$

$\boxed{y = \cancel{\sin x} + \cos x \cancel{\ldots}}$

2) $y'' + y' - 6y = (-8x^2 - 1)e^x$

on Résoudre équation homogène. $y'' + y' - 6y = 0$

équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \cdot (-6) = 25 > 0$

Donc on a deux racines $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = -3$

$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2} = 2$

$\boxed{y_h = Ae^{-3x} + Be^{2x}}$

on cherche la Solution particulière

on a $\alpha = 1$ n'est pas racine de E.C

alors la Solution $y_p = Q(x)\,e^x$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$

$y = Q(x)\,e^x = (ax^2 + bx + c)e^x$

$y' = (ax^2 + bx + c)e^x + (2ax + b)e^x$

$y'' = (2ax + b)e^x + (2a)e^x$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRESIDENT

on remplace dans l'équation. $y'' + y' - 6y = (-8x^2 - 1)e^x$

$$(2ax+b)e^x + (2a)e^x + (ax^2+bx+c)e^x + (2ax+b)e^x$$

$$(2ax+b)e^x + (2a)e^x + (ax^2+bx+c)e^x + (2ax+b)e^x - 6(Ae^{2x} + Be^{-3x}) = (-8x^2-1)e^x$$

$$2a + 6ax + 3b - 4ax^2 - 4bx - 4c = -8x^2 - 1$$

$$-4ax^2 + (6a-4b)x + 2a + 3b - 4c = -8x^2 - 1$$

$$\begin{cases} -4a = -8 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2a + 3b - 4c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ 4 + 9 - 4c = -1 \Rightarrow c = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$y_p = \left(2x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right)e^x$$

$$\boxed{y = y_0 + y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x} + \left(2x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right)e^x}$$

Exercice $\boxed{03}$ normale 2012/2013 | Analyse |

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \qquad]1,+\infty[$$

① $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = (\ln x)'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

La nature $\begin{cases} f \text{ continue sur }]1,2] \\ \text{et } \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx$ converge

② $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} \cdot \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$, F.I

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2} \cdot \ln x}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-1/2} \ln x}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$

(car les puissance de x l'emportent sur $\ln x$)

<u>La nature</u> : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et f, g sont localement intégrable sur $[2,+\infty[$.

et $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ CVge. car Riemann au $V(+\infty)$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

donc $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

③ on a f localement intégrable sur $]1,+\infty[$.

avec $\int_1^2 f(x)\,dx$ converge.

et $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\Rightarrow$ Finalement $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Exercice III}}$ $\boxed{\text{Rattrapage 2012/2013}}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \quad]1, +\infty[$$

1] Calculer l'intégrale $\int_1^X \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

on pose

$$u' = \frac{1}{x} \qquad u = \ln x$$

$$v = -\frac{1}{x} \qquad v' = \frac{1}{x^2}$$

$$= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^X - \int_1^X -\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln X}{X} + \frac{\ln 1}{1} + \int_1^X \frac{dx}{x^2}$$

on obtient $\int_1^X \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln X}{X} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X = -\frac{\ln X}{X} - \frac{1}{X} + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^X \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-\frac{\ln X}{X}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{X}}_{0} + 1 = 1$$

<u>la nature</u>

on a $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right) \Big/ \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} > 0$ pour $x > 1$ et $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} > 0$ pour $x > 1$

Suite Exercice 03 | Rattrapage 2012/2013

Le critère d'équivalence

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ de même nature or

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ est convergente (d'après 1)

Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente

3) $t = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to 0 \\ dt = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2\,dt = -\frac{dt}{t^2} \end{cases}$

$x = \frac{1}{t}$

$K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ s'écrit $\int_1^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t^2}\right)}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$

$= -\int_1^{0} \frac{-\ln t}{\frac{t^2+1}{t^2}} \frac{dt}{t^2}$

$= -\int_1^{0} \frac{-\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int_0^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int_0^{1} f(t)\,dt$

4) $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

Sur $]0,1]$ $f(x) \leq 0 \Rightarrow$ Sur $]0,1]$ $|f(x)| = -f(x)$

Sur $[1,+\infty[$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow$ Sur $[1,+\infty[$ $|f(x)| = f(x)$

$I = \int_0^{1} -f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_0^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$= K + K = 2K$

K étant convergente $\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente

$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right.$ est absolument convergente$\left.\right)$

ce qui implique que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

5) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{1} f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = K - K = 0$$

$$\left(\text{d'après } 3/\ \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_0^{1} f(t)\,dt\right)$$

«اللهم اجعل أولها كفاحا وآخرها نجاحا»

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

MAIDEN
ZAKARIA

CLUB
NAJAH

3